

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

---

Кафедра “Прикладная математика - 2”

А.Е.Гарслян, А.С.Милевский, Л.Ф.Кочнева

ЗАДАЧИ ПО ЭКОНОМЕТРИКЕ  
ЧАСТЬ 1. ПАРНАЯ И МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ

Москва - 2009

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

---

Кафедра “Прикладная математика - 2”

А.Е.Гарслян, А.С.Милевский, Л.Ф.Кочнева

ЗАДАЧИ ПО ЭКОНОМЕТРИКЕ  
ЧАСТЬ 1. ПАРНАЯ И МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия  
для студентов специальностей ЭМЭ, ЭУН, ЭЭС, ЭТБ, ФИК, ЭИЭ,  
ЭЭТ, УПП

Москва - 2009

## 1. Парная регрессия

1.1. По выборке:  $(X_1; Y_1)$ ,  $(X_2; Y_2)$ ,  $(X_3; Y_3)$ ,  $(X_4; Y_4)$  из таблицы 1 найти значения параметров  $a$  и  $b$  линейной модели  $\hat{Y} = aX + b$ .

Таблица 1.

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
1	(1;1)	(2;4)	(3;2)	(4;3)
2	(1;4)	(2;1)	(2;2)	(3;1)
3	(5;1)	(4;3)	(3;3)	(2;4)
4	(5;2)	(4;2)	(3;1)	(2;1)
5	(3;2)	(4;4)	(5;3)	(6;5)
6	(1;1)	(2;5)	(3;2)	(4;6)
7	(1;4)	(2;6)	(2;2)	(3;4)
8	(1;1)	(2;3)	(3;2)	(4;4)
9	(1;2)	(2;2)	(3;1)	(4;1)
10	(1;5)	(2;2)	(3;1)	(2;4)
11	(1;1)	(2;4)	(3;2)	(4;3)
12	(1;4)	(2;1)	(2;2)	(3;1)
13	(5;1)	(4;3)	(3;3)	(2;4)
14	(5;2)	(4;2)	(3;1)	(2;1)

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
15	(3;2)	(4;4)	(5;3)	(6;5)
16	(1;1)	(2;5)	(3;2)	(4;6)
17	(1;4)	(2;6)	(2;2)	(3;4)
18	(1;1)	(2;3)	(3;2)	(4;4)
19	(1;2)	(2;2)	(3;1)	(4;1)
20	(1;5)	(2;2)	(3;1)	(2;4)
21	(1;1)	(2;4)	(3;2)	(4;3)
22	(1;4)	(2;1)	(2;2)	(3;1)
23	(5;1)	(4;3)	(3;3)	(2;4)
24	(5;2)	(4;2)	(3;1)	(2;1)
25	(3;2)	(4;4)	(5;3)	(6;5)
26	(1;1)	(2;5)	(3;2)	(4;6)
27	(1;4)	(2;6)	(2;2)	(3;4)
28	(1;1)	(2;3)	(3;2)	(4;4)
29	(1;2)	(2;2)	(3;1)	(4;1)
30	(1;5)	(2;2)	(3;1)	(2;4)

1.2. По выборке:  $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), (X_3; Y_3), (X_4; Y_4)$  из таблицы 2 найти значения параметров  $a$  и  $b$  степенной модели  $\hat{Y} = aX^b$ , используя переход к линейному представлению относительно вспомогательной переменной.

Таблица 2.

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
1	(1;1)	(2;4)	(3;6)	(4;18)
2	(1;4)	(2;16)	(2;12)	(3;18)
3	(1;3)	(2;12)	(3;27)	(4;33)
4	(1;4)	(2;20)	(3;15)	(4;21)
5	(1;2)	(2;12)	(3;30)	(6;50)
6	(1;1)	(2;10)	(3;40)	(4;60)
7	(1;4)	(2;26)	(3;42)	(4;64)
8	(1;2)	(2;13)	(3;28)	(4;40)
9	(1;1)	(2;8)	(3;35)	(4;60)
10	(1;1)	(2;12)	(3;24)	(4;54)
11	(1;1)	(2;4)	(3;6)	(4;18)
12	(1;4)	(2;16)	(2;12)	(3;18)
13	(1;3)	(2;12)	(3;27)	(4;33)
14	(1;4)	(2;20)	(3;15)	(4;21)

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
15	(1;2)	(2;12)	(3;30)	(6;50)
16	(1;1)	(2;10)	(3;40)	(4;60)
17	(1;4)	(2;26)	(3;42)	(4;64)
18	(1;2)	(2;13)	(3;28)	(4;40)
19	(1;1)	(2;8)	(3;35)	(4;60)
20	(1;1)	(2;12)	(3;24)	(4;54)
21	(1;1)	(2;4)	(3;6)	(4;18)
22	(1;4)	(2;16)	(2;12)	(3;18)
23	(1;3)	(2;12)	(3;27)	(4;33)
24	(1;4)	(2;20)	(3;15)	(4;21)
25	(1;2)	(2;12)	(3;30)	(6;50)
26	(1;1)	(2;10)	(3;40)	(4;60)
27	(1;4)	(2;26)	(3;42)	(4;64)
28	(1;2)	(2;13)	(3;28)	(4;40)
29	(1;1)	(2;8)	(3;35)	(4;60)
30	(1;1)	(2;12)	(3;24)	(4;54)

1.3. По выборке:  $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), (X_3; Y_3), (X_4; Y_4)$  из таблицы 3 найти значения параметров  $a$  и  $b$  показательной модели

$\hat{Y} = ab^x$ , используя переход к линейному представлению относительно вспомогательной переменной.

**Таблица 3.**

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
1	(1;1)	(3;14)	(3;16)	(4;28)
2	(1;2)	(2;26)	(2;3 2)	(3;58)
3	(1;36)	(2;2)	(3;27)	(4;63)
4	(1;40)	(2;20)	(3;1)	(4;2)
5	(1;22)	(2;2)	(3;1)	(6;1)
6	(1;3)	(2;10)	(3;10)	(4;16)
7	(1;5)	(2;5)	(3;2)	(4;1)
8	(1;1)	(2;1)	(3;4)	(4;20)
9	(1;9)	(2;2)	(3;1)	(4;2)
10	(1;4)	(2;5)	(3;20)	(4;50)
11	(1;1)	(3;14)	(3;16)	(4;28)
12	(1;2)	(2;26)	(2;3 2)	(3;58)
13	(1;36)	(2;2)	(3;27)	(4;63)
14	(1;40)	(2;20)	(3;1)	(4;2)
15	(1;22)	(2;2)	(3;1)	(6;1)

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
16	(1;3)	(2;10)	(3;10)	(4;16)
17	(1;5)	(2;5)	(3;2)	(4;1)
18	(1;1)	(2;1)	(3;4)	(4;20)
19	(1;9)	(2;2)	(3;1)	(4;2)
20	(1;4)	(2;5)	(3;20)	(4;50)
21	(1;1)	(3;14)	(3;16)	(4;28)
22	(1;2)	(2;26)	(2;3 2)	(3;58)
23	(1;36)	(2;2)	(3;27)	(4;63)
24	(1;40)	(2;20)	(3;1)	(4;2)
25	(1;22)	(2;2)	(3;1)	(6;1)
26	(1;3)	(2;10)	(3;10)	(4;16)
27	(1;5)	(2;5)	(3;2)	(4;1)
28	(1;1)	(2;1)	(3;4)	(4;20)
29	(1;9)	(2;2)	(3;1)	(4;2)
30	(1;4)	(2;5)	(3;20)	(4;50)

**1.4.** По выборке: (X<sub>1</sub>;Y<sub>1</sub>), (X<sub>2</sub>;Y<sub>2</sub>), (X<sub>3</sub>;Y<sub>3</sub>), (X<sub>4</sub>;Y<sub>4</sub>) из таблицы 4 найти значения параметров a и b гиперболической модели  $\hat{Y} = a + \frac{b}{X}$ , используя переход к линейному представлению относительно вспомогательной переменной.

**Таблица 4.**

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
1	(1;18)	(2;6)	(3;1)	(4;1)
2	(1;4)	(2;12)	(2;12)	(3;18)
3	(1;30)	(2;12)	(3;3)	(4;1)
4	(1;4)	(2;20)	(3;25)	(4;28)
5	(1;5)	(2;22)	(3;30)	(6;35)
6	(1;6)	(2;30)	(3;40)	(4;45)
7	(1;7)	(2;21)	(3;24)	(4;30)
8	(1;8)	(2;40)	(3;42)	(4;40)
9	(1;9)	(2;9)	(3;30)	(4;70)
10	(1;10)	(2;12)	(3;2)	(4;1)
11	(1;18)	(2;6)	(3;1)	(4;1)
12	(1;4)	(2;12)	(2;12)	(3;18)
13	(1;30)	(2;12)	(3;3)	(4;1)
14	(1;4)	(2;20)	(3;25)	(4;28)
15	(1;5)	(2;22)	(3;30)	(6;35)
16	(1;6)	(2;30)	(3;40)	(4;45)
17	(1;7)	(2;21)	(3;24)	(4;30)

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
18	(1;8)	(2;40)	(3;42)	(4;40)
19	(1;9)	(2;9)	(3;30)	(4;70)
20	(1;10)	(2;12)	(3;2)	(4;1)
21	(1;18)	(2;6)	(3;1)	(4;1)
22	(1;4)	(2;12)	(2;12)	(3;18)
23	(1;30)	(2;12)	(3;3)	(4;1)
24	(1;4)	(2;20)	(3;25)	(4;28)
25	(1;5)	(2;22)	(3;30)	(6;35)
26	(1;6)	(2;30)	(3;40)	(4;45)
27	(1;7)	(2;21)	(3;24)	(4;30)
28	(1;8)	(2;40)	(3;42)	(4;40)
29	(1;9)	(2;9)	(3;30)	(4;70)
30	(1;10)	(2;12)	(3;2)	(4;1)

**1.5.** По выборке: (X<sub>1</sub>;Y<sub>1</sub>), (X<sub>2</sub>;Y<sub>2</sub>), (X<sub>3</sub>;Y<sub>3</sub>), (X<sub>4</sub>;Y<sub>4</sub>) из таблицы 5 найти наилучшие по МНК значения параметров а и b параболической модели  $\hat{Y} = a(X^2 - 4) + b(2X + 1)$

**Таблица 5.**

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
1	(1;3)	(2;10)	(3;8)	(4;2)

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
2	(1;2)	(2;5)	(2;6)	(3;8)
3	(1;3)	(2;4)	(3;9)	(4;9)
4	(1;7)	(2;3)	(3;8)	(4;8)
5	(1;6)	(2;1)	(3;30)	(6;5)
6	(1;2)	(2;0)	(2;6)	(4;6)
7	(1;8)	(2;2)	(3;4)	(4;6)
8	(1;4)	(2;1)	(3;8)	(4;4)
9	(1;3)	(2;3)	(2;6)	(4;6)
10	(1;5)	(2;1)	(3;24)	(4;5)
11	(1;3)	(2;10)	(3;8)	(4;2)
12	(1;2)	(2;5)	(2;6)	(3;8)
13	(1;3)	(2;4)	(3;9)	(4;9)
14	(1;7)	(2;3)	(3;8)	(4;8)
15	(1;6)	(2;1)	(3;30)	(6;5)
16	(1;2)	(2;0)	(2;6)	(4;6)
17	(1;8)	(2;2)	(3;4)	(4;6)
18	(1;4)	(2;1)	(3;8)	(4;4)
19	(1;3)	(2,3)	(2;6)	(4;6)

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	(X <sub>4</sub> ;Y <sub>4</sub> )
20	(1;5)	(2;1)	(3;24)	(4;5)
21	(1;3)	(2;10)	(3;8)	(4;2)
22	(1;2)	(2;5)	(2;6)	(3;8)
23	(1;3)	(2;4)	(3;9)	(4;9)
24	(1;7)	(2;3)	(3;8)	(4;8)
25	(1;6)	(2;1)	(3;30)	(6;5)
26	(1;2)	(2;0)	(2;6)	(4;6)
27	(1;8)	(2;2)	(3;4)	(4;6)
28	(1;4)	(2;1)	(3;8)	(4;4)
29	(1;3)	(2,3)	(2;6)	(4;6)
30	(1;5)	(2;1)	(3;24)	(4;5)

**1.6.** По выборке: (X<sub>1</sub>;Y<sub>1</sub>), (X<sub>2</sub>;Y<sub>2</sub>), (X<sub>3</sub>;Y<sub>3</sub>), (X<sub>4</sub>;Y<sub>4</sub>) из таблицы 1 и уравнениям линейной и параболической моделей  $\hat{Y} = aX + b$  и  $\hat{Y} = aX^2 + bX$ , параметры a, b для которых заданы в таблице 6, выяснить: какая из них лучше по средней относительной ошибке аппроксимации, и является ли она же лучшей по МНК критерию.

**Таблица 6.**

№	a	b
1	1	2
2	2	1

3	3	1
4	4	0
5	2	1
6	3	3
7	5	2
8	1	2
9	4	1
10	2	2
11	1	2
12	2	1
13	3	1
14	4	0
15	2	1
16	3	3
17	5	2
18	1	2
19	4	1
20	2	2
21	1	2

22	2	1
23	3	1
24	4	0
25	2	1
26	3	3
27	5	2
28	1	2
29	4	1
30	2	2

**1.7.** Размер капиталовложения  $X$  и соответствующей прибыли предприятия  $Y$  по месяцам, представлен выборкой:  $(X_1; Y_1)$ ,  $(X_2; Y_2)$ ,  $(X_3; Y_3)$ ,  $(X_4; Y_4)$  из таблицы 1. Используя прямые регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ , провести точечное и интервальное, на уровне значимости  $\alpha$ , прогнозирование величины прибыли  $Y = Y_{KW}$ , при капиталовложении  $X = X_{KW}$ , которое в  $K$  раз больше прогнозного значения капиталовложений:  $X = X_W$ , соответствующего желаемой величине прибыли:  $Y=W$ , заданной вместе с  $K$  и  $\alpha$  в таблице 7.

**Таблица 7.**

№	$\alpha$	$K$	$W$
1	0,1	2	8
2	0,05	3	9

3	0,01	1,5	7
4	0,05	1,2	9
5	0,05	3	7
6	0,01	2	8
7	0,1	1,8	9
8	0,01	2	6
9	0,05	3	8
10	0,1	2	7
11	0,1	2	8
12	0,05	3	9
13	0,01	1,5	7
14	0,05	1,2	9
15	0,05	3	7
16	0,01	2	8
17	0,1	1,8	9
18	0,01	2	6
19	0,05	3	8
20	0,1	2	7
21	0,1	2	8

22	0,05	3	9
23	0,01	1,5	7
24	0,05	1,2	9
25	0,05	3	7
26	0,01	2	8
27	0,1	1,8	9
28	0,01	2	6
29	0,05	3	8
30	0,1	2	7

- 1.8.** По выборке  $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), (X_3; Y_3), (X_4; Y_4)$  из таблицы 8
- найти параметры  $a$  и  $b$  линейной модели  $\hat{Y} = aX + b$ ;
  - вычислить RSS, ESS, TSS и коэффициент детерминации  $R^2$ ;
  - вычислить оценку коэффициента корреляции  $r_{XY}$  и сравнить ее квадрат с найденным коэффициентом детерминации.

**Таблица 8**

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
1	(1;3)	(2;4)	(3;6)	(4;6)
2	(1;2)	(2;8)	(2;6)	(3;6)
3	(1;3)	(2;12)	(3;7)	(4;3)
4	(1;4)	(2;2)	(3;5)	(4;21)



№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
5	(1;2)	(2;12)	(3;3)	(6;5)
6	(1;1)	(2;10)	(3;4)	(4;6)
7	(1;4)	(2;6)	(3;2)	(4;4)
8	(1;2)	(2;1)	(3;2)	(4;4)
9	(1;1)	(2;8)	(3;3)	(4;6)
10	(1;5)	(2;8)	(3;14)	(4;4)
11	(1;3)	(2;4)	(3;6)	(4;6)
12	(1;2)	(2;8)	(2;6)	(3;6)
13	(1;3)	(2;12)	(3;7)	(4;3)
14	(1;4)	(2;2)	(3;5)	(4;21)
15	(1;2)	(2;12)	(3;3)	(6;5)
16	(1;1)	(2;10)	(3;4)	(4;6)
17	(1;4)	(2;6)	(3;2)	(4;4)
18	(1;2)	(2;1)	(3;2)	(4;4)
19	(1;1)	(2;8)	(3;3)	(4;6)
20	(1;5)	(2;8)	(3;14)	(4;4)
21	(1;3)	(2;4)	(3;6)	(4;6)
22	(1;2)	(2;8)	(2;6)	(3;6)

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$(X_4; Y_4)$
23	(1;3)	(2;12)	(3;7)	(4;3)
24	(1;4)	(2;2)	(3;5)	(4;21)
25	(1;2)	(2;12)	(3;3)	(6;5)
26	(1;1)	(2;10)	(3;4)	(4;6)
27	(1;4)	(2;6)	(3;2)	(4;4)
28	(1;2)	(2;1)	(3;2)	(4;4)
29	(1;1)	(2;8)	(3;3)	(4;6)
30	(1;5)	(2;8)	(3;14)	(4;4)

**1.9.** По выборке:  $(X_1; Y_1)$ ,  $(X_2; Y_2)$ ,  $(X_3; Y_3)$  из таблицы 9 найти параметры  $a$  и  $b$  линейной модели  $\hat{Y} = aX + b$  и оценить ее качество с помощью F-теста на уровне значимости  $\alpha$ , заданном в той же таблице.

Таблица 9

№	$(X_1; Y_1)$	$(X_2; Y_2)$	$(X_3; Y_3)$	$\alpha$
1	(1;3)	(2;4)	(3;6)	0,1
2	(1;2)	(2;8)	(2;6)	0,05
3	(1;3)	(2;12)	(3;7)	0,01
4	(1;4)	(2;2)	(3;5)	0,1
5	(1;2)	(2;12)	(3;3)	0,01

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	$\alpha$
6	(1;1)	(2;10)	(3;4)	0,05
7	(1;4)	(2;6)	(3;2)	0,1
8	(1;2)	(2;1)	(3;2)	0,01
9	(1;1)	(2;8)	(3;3)	0,05
10	(1;5)	(2;8)	(3;14)	0,01
11	(1;3)	(2;4)	(3;6)	0,1
12	(1;2)	(2;8)	(2;6)	0,05
13	(1;3)	(2;12)	(3;7)	0,01
14	(1;4)	(2;2)	(3;5)	0,1
15	(1;2)	(2;12)	(3;3)	0,01
16	(1;1)	(2;10)	(3;4)	0,05
17	(1;4)	(2;6)	(3;2)	0,1
18	(1;2)	(2;1)	(3;2)	0,01
19	(1;1)	(2;8)	(3;3)	0,05
20	(1;5)	(2;8)	(3;14)	0,01
21	(1;3)	(2;4)	(3;6)	0,1
22	(1;2)	(2;8)	(2;6)	0,05
23	(1;3)	(2;12)	(3;7)	0,01

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	$\alpha$
24	(1;4)	(2;2)	(3;5)	0,1
25	(1;2)	(2;12)	(3;3)	0,01
26	(1;1)	(2;10)	(3;4)	0,05
27	(1;4)	(2;6)	(3;2)	0,1
28	(1;2)	(2;1)	(3;2)	0,01
29	(1;1)	(2;8)	(3;3)	0,05
30	(1;5)	(2;8)	(3;14)	0,01

**1.10.** По выборке: (X<sub>1</sub>;Y<sub>1</sub>), (X<sub>2</sub>;Y<sub>2</sub>), (X<sub>3</sub>;Y<sub>3</sub>) из таблицы 10

а) найти  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  – выборочные оценки параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$  линейной регрессионной модели генеральной совокупности (X,Y):  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайная ошибка регрессионной модели;

б) на уровне значимости  $\alpha$  из той же таблицы построить доверительные интервалы для коэффициентов  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и для  $\sigma^2 = D(\varepsilon)$  – дисперсии случайной ошибки  $\varepsilon$  из уравнения линейной регрессионной модели генеральной совокупности (X,Y).

**Таблица 10**

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	$\alpha$
1	(1;7)	(2;4)	(3;6)	0,1
2	(1;3)	(2;8)	(2;6)	0,05
3	(1;2)	(2;8)	(3;7)	0,01

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	$\alpha$
4	(1;1)	(2;2)	(3;6)	0,1
5	(1;5)	(2;12)	(3;3)	0,01
6	(1;4)	(2;5)	(3;4)	0,05
7	(1;2)	(2;6)	(3;5)	0,1
8	(1;6)	(2;1)	(3;2)	0,01
9	(1;3)	(2;8)	(3;3)	0,05
10	(1;4)	(2;6)	(3;10)	0,01
11	(1;7)	(2;4)	(3;6)	0,1
12	(1;3)	(2;8)	(2;6)	0,05
13	(1;2)	(2;8)	(3;7)	0,01
14	(1;1)	(2;2)	(3;6)	0,1
15	(1;5)	(2;12)	(3;3)	0,01
16	(1;4)	(2;5)	(3;4)	0,05
17	(1;2)	(2;6)	(3;5)	0,1
18	(1;6)	(2;1)	(3;2)	0,01
19	(1;3)	(2;8)	(3;3)	0,05
20	(1;4)	(2;6)	(3;10)	0,01
21	(1;7)	(2;4)	(3;6)	0,1

№	(X <sub>1</sub> ;Y <sub>1</sub> )	(X <sub>2</sub> ;Y <sub>2</sub> )	(X <sub>3</sub> ;Y <sub>3</sub> )	$\alpha$
22	(1;3)	(2;8)	(2;6)	0,05
23	(1;2)	(2;8)	(3;7)	0,01
24	(1;1)	(2;2)	(3;6)	0,1
25	(1;5)	(2;12)	(3;3)	0,01
26	(1;4)	(2;5)	(3;4)	0,05
27	(1;2)	(2;6)	(3;5)	0,1
28	(1;6)	(2;1)	(3;2)	0,01
29	(1;3)	(2;8)	(3;3)	0,05
30	(1;4)	(2;6)	(3;10)	0,01

## 2. Множественная регрессия

2.1. По выборке значений для зависимой переменной Y и двух объясняющих переменных X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, образующих тройки: (X<sub>1</sub>; X<sub>2</sub>; Y)<sub>1</sub>, (X<sub>1</sub>; X<sub>2</sub>; Y)<sub>2</sub>, (X<sub>1</sub>; X<sub>2</sub>; Y)<sub>3</sub>, (X<sub>1</sub>; X<sub>2</sub>; Y)<sub>4</sub> из таблицы 11, най-

ти  $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$  – вектор оценок коэффициентов уравнения линей-

ной регрессионной модели генеральной совокупности (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, Y):  
 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели

Таблица 11

№	(X <sub>1</sub> ;X <sub>2</sub> ;Y) <sub>1</sub>	(X <sub>1</sub> ;X <sub>2</sub> ;Y) <sub>2</sub>	(X <sub>1</sub> ;X <sub>2</sub> ;Y) <sub>3</sub>	(X <sub>1</sub> ;X <sub>2</sub> ;Y) <sub>4</sub>
---	--	--	--	--

№	$(X_1; X_2; Y)_1$	$(X_1; X_2; Y)_2$	$(X_1; X_2; Y)_3$	$(X_1; X_2; Y)_4$
1	(1;1;3)	(2;4;2)	(3;2;4)	(4;3;6)
2	(1;4;1)	(2;1;4)	(2;2;3)	(3;1;5)
3	(5;1;1)	(4;3;4)	(3;3;2)	(2;4;6)
4	(5;2;3)	(4;2;6)	(3;1;2)	(2;1;1)
5	(3;2;2)	(4;4;1)	(5;3;4)	(6;5;3)
6	(1;1;4)	(2;5;3)	(3;2;6)	(4;6;8)
7	(1;4;2)	(2;6;3)	(2;2;6)	(3;4;1)
8	(1;1;8)	(2;3;5)	(3;2;1)	(4;4;2)
9	(1;2;5)	(2;2;2)	(3;1;3)	(4;1;1)
10	(1;5;2)	(2;2;1)	(3;1;4)	(2;4;6)
11	(1;1;3)	(2;4;2)	(3;2;4)	(4;3;6)
12	(1;4;1)	(2;1;4)	(2;2;3)	(3;1;5)
13	(5;1;1)	(4;3;4)	(3;3;2)	(2;4;6)
14	(5;2;3)	(4;2;6)	(3;1;2)	(2;1;1)
15	(3;2;2)	(4;4;1)	(5;3;4)	(6;5;3)
16	(1;1;4)	(2;5;3)	(3;2;6)	(4;6;8)
17	(1;4;2)	(2;6;3)	(2;2;6)	(3;4;1)
18	(1;1;8)	(2;3;5)	(3;2;1)	(4;4;2)

№	$(X_1; X_2; Y)_1$	$(X_1; X_2; Y)_2$	$(X_1; X_2; Y)_3$	$(X_1; X_2; Y)_4$
19	(1;2;5)	(2;2;2)	(3;1;3)	(4;1;1)
20	(1;5;2)	(2;2;1)	(3;1;4)	(2;4;6)
21	(1;1;3)	(2;4;2)	(3;2;4)	(4;3;6)
22	(1;4;1)	(2;1;4)	(2;2;3)	(3;1;5)
23	(5;1;1)	(4;3;4)	(3;3;2)	(2;4;6)
24	(5;2;3)	(4;2;6)	(3;1;2)	(2;1;1)
25	(3;2;2)	(4;4;1)	(5;3;4)	(6;5;3)
26	(1;1;4)	(2;5;3)	(3;2;6)	(4;6;8)
27	(1;4;2)	(2;6;3)	(2;2;6)	(3;4;1)
28	(1;1;8)	(2;3;5)	(3;2;1)	(4;4;2)
29	(1;2;5)	(2;2;2)	(3;1;3)	(4;1;1)
30	(1;5;2)	(2;2;1)	(3;1;4)	(2;4;6)

**2.2.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11 и заданным в таблице 12 значениям  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  - оценок коэффициентов уравнения линейной регрессионной модели генеральной совокупности  $(X_1, X_2, Y)$ :  
 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - случайная ошибка модели, найти выборочную оценку дисперсии случайной ошибки этой модели  $S^2$  и  $RSS$ .

Таблица 12.

№	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
1	2	1	-1
2	3	-1	1
3	4	2	1
4	8	3	-2
5	6	2	-3
6	2	-1	4
7	5	2	-1
8	4	-2	3
9	3	-2	2
10	2	-3	2
11	2	1	-1
12	3	-1	1
13	4	2	1
14	8	3	-2
15	6	2	-3
16	2	-1	4
17	5	2	-1

18	4	-2	3
19	3	-2	2
20	2	-3	2
21	2	1	-1
22	3	-1	1
23	4	2	1
24	8	3	-2
25	6	2	-3
26	2	-1	4
27	5	2	-1
28	4	-2	3
29	3	-2	2
30	2	-3	2

**2.3.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, найти  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  – выборочные коэффициенты уравнения линейной регрессии:  
 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели, и соответствующие этим выборочным коэффициентам оценки среднеквадратических отклонений  $S_{\beta_0}, S_{\beta_1}, S_{\beta_2}$ .

**2.4.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, найти матрицу парных коэффициентов корреляции.

**2.5.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, найти  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ -выборочные коэффициенты уравнения линейной регрессии:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели, и на уровне значимости  $\alpha = 0,1$  построить доверительные интервалы для  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  - коэффициентов этого уравнения и для  $\sigma^2 = D(\varepsilon)$  – дисперсии случайной ошибки этой модели.

**2.6.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, на уровне значимости  $\alpha = 0,1$ :

а) проверить гипотезы о равенстве коэффициентов  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  уравнения линейной регрессии

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели, соответствующим значениям, заданным в таблице 13;

б) проверить гипотезу о равенстве  $\sigma^2 = D(\varepsilon)$  - дисперсии случайной ошибки этой модели соответствующему значению, заданному в таблице 13.

**Таблица 13**

№	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma^2$
1	4	2	-1	0,3

№	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma^2$
2	2	-3	1	0,2
3	6	1	-2	0,4
4	4	2	-5	1,1
5	7	3	-1	0,5
6	8	-2	3	0,25
7	4	1	-2	0,31
8	2	-1	4	0,22
9	6	-2	2	0,34
10	7	-2	1	1,3
11	4	2	-1	0,3
12	2	-3	1	0,2
13	6	1	-2	0,4
14	4	2	-5	1,1
15	7	3	-1	0,5
16	8	-2	3	0,25
17	4	1	-2	0,31
18	2	-1	4	0,22
19	6	-2	2	0,34

№	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma^2$
20	7	-2	1	1,3
21	4	2	-1	0,3
22	2	-3	1	0,2
23	6	1	-2	0,4
24	4	2	-5	1,1
25	7	3	-1	0,5
26	8	-2	3	0,25
27	4	1	-2	0,31
28	2	-1	4	0,22
29	6	-2	2	0,34
30	7	-2	1	1,3

**2.7.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, найти  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ -выборочные коэффициенты уравнения линейной регрессии:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ – случайная ошибка модели,}$$

и вычислить соответствующие полученной модели коэффициент детерминации  $R^2$  и скорректированный коэффициент детерминации  $R_{корр}^2$ .

**2.8.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:

$(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11, найти  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ -выборочные коэффициенты уравнения линейной регрессии :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ – случайная ошибка модели,}$$

и оценить качество полученной модели на уровне значимости  $\alpha = 0,1$ , применив F-критерий,

**2.9.** По выборке значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ , образующих тройки:  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  из таблицы 11 провести процедуру пошагового отбора переменных (факторов).

**2.10.** По выборкам 1,2 значений для зависимой переменной  $Y$  и двух объясняющих переменных  $X_1, X_2$ :  $(X_1; X_2; Y)_1, (X_1; X_2; Y)_2, (X_1; X_2; Y)_3, (X_1; X_2; Y)_4$  – выборка 1, и  $(X_1; X_2; Y)_5, (X_1; X_2; Y)_6, (X_1; X_2; Y)_7, (X_1; X_2; Y)_8$  – выборка 2 из таблицы 14 проверить гипотезу о возможности объединения их в одну выборку объёма 8 по критерию Чоу на уровне значимости  $\alpha = 0,1$ .

**Таблица 14**

№	Выборка 1	Выборка 2
1	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)
2	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)
3	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
4	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)
5	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)
6	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
7	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)

№	Выборка 1	Выборка 2
8	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)
9	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)
10	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)
11	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)
12	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)
13	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
14	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)
15	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)
16	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
17	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)
18	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)
19	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)
20	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)
21	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)
22	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)
23	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
24	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)
25	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)

№	Выборка 1	Выборка 2
26	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
27	(1;1;4) (2;5;3) (3;2;6) (4;6;8)	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)
28	(1;1;8) (2;3;5) (3;2;1) (4;4;2)	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)
29	(1;2;5) (2;2;2) (3;1;3) (4;1;1)	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)
30	(1;5;2) (2;2;1) (3;1;4) (2;4;6)	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)
31	(1;1;3) (2;4;2) (3;2;4) (4;3;6)	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)
32	(1;4;1) (2;1;4) (2;2;3) (3;1;5)	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)
33	(5;1;1) (4;3;4) (3;3;2) (2;4;6)	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)
34	(5;2;3) (4;2;6) (3;1;2) (2;1;1)	(3;2;2) (4;4;1) (5;3;4) (6;5;3)

## Литература

1. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2004.
2. Бородич С.А. Эконометрика: Учеб. пособие. – Мн.: Новое знание, 2001.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику – М.: ИНФРА-М, 2001.
4. Берндт Э.Р. Практика эконометрики: классика и современность. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2005.



## Приложение. Таблицы квантилей

Квантили  $u_p$  стандартного нормального закона распределения  $N(1,0)$ .

p	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
$u_p$	1,282	1,645	1,960	2,325	2,576	3,090	3,291

Квантили  $\chi_p^2(k)$  закона распределения  $\chi^2(k)$ ,

p \ k	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,0002	0,001	0,004	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1
10	2,56	3,25	3,94	4,87	16	18,3	20,5	23,2
20	7,63	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6
30	14,3	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9
40	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7
50	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2
75	49,5	53	56,1	59,8	91,1	96,2	100,8	106,4

p \ k	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
100	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,6

Квантили  $t_p(k)$  закона распределения Стьюдента  $T(k)$ ,

p \ k	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
30	1,312	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
120	1,289	1,658	2,98	2,358	2,617

Квантили  $F_{0,9}(n_1, n_2)$  закона распределения Фишера

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	10	15	20	30	120
1	40	8,53	5,54	4,54	4,06	3,29	3,07	2,97	2,88	2,75

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	10	15	20	30	120
2	49,5	9	5,46	4,32	3,78	2,92	2,7	2,59	2,49	2,35
3	53,6	9,16	5,39	4,19	3,62	2,73	2,49	2,38	2,28	2,13
4	55,8	9,24	5,34	4,11	3,52	2,61	2,36	2,25	2,14	1,99
30	62,2	9,46	5,17	3,82	3,17	2,16	1,87	1,74	1,61	1,41

Квантили  $F_{0,95}(n_1, n_2)$  закона распределения Фишера

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	10	15	20	30	120
1	161	18,5	10,13	7,71	6,61	4,96	4,54	4,35	4,24	3,92
2	199	19	9,55	6,94	5,79	4,1	3,68	3,49	3,39	3,07
3	216	19,16	9,28	6,59	5,41	3,71	3,29	3,1	2,99	2,68
4	225	19,25	9,12	6,39	5,19	3,48	3,05	2,87	2,76	2,45
30	250	19,46	8,62	5,75	4,5	2,7	2,25	2,04	1,84	1,55

## Оглавление

1. Парная регрессия.....	3
2. Множественная регрессия.....	22
Литература.....	32
Приложение. Таблицы квантилей.....	33